

UNIwersytet Gdański
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki

inż. Maksymilian Kutyla

Kierunek: Fizyka Medyczna

Numer albumu: 260752

Podstawy fizyki wybranych magnetometrów

Praca magisterska napisana
w Instytucie Fizyki Teoretycznej i Astrofizyki
pod kierunkiem dr hab. Tomasza Paterka, prof. UG

Gdańsk 2021

Streszczenie

Magnetometr to czujnik, którego podstawowym celem jest pomiar natężenia i kierunku pola magnetycznego. Do najbardziej precyzyjnych tego typu urządzeń należą magnetometry nadprzewodzące i optyczne. Niniejsza praca skupia się na podstawowych zjawiskach fizycznych niezbędnych do zrozumienia zasady działania tych urządzeń.

W części pierwszej opisano magnetometry nadprzewodzące również ze względu na to, że znalazły już one swoje zastosowanie w medycynie. Po krótko opisano zjawisko nadprzewodnictwa i związany z nim efekt kwantowania strumienia magnetycznego przecinającego nadprzewodzący pierścień. Następnie wprowadzono SQUID, nadprzewodzący interferometr kwantowy zawierający dwa złącza Josephsona, by wyliczyć na konkretnym przykładzie w jaki sposób prąd na wyjściu z tego urządzenia koduje informację o polu magnetycznym. Największymi wadami magnetometrów nadprzewodzących jest niepraktyczny rozmiar urządzenia pomiarowego wynikający z konieczności silnego chłodzenia materii przewodzącej oraz to, że wymagają specjalnie odizolowanych magnetycznie pomieszczeń.

Problem ten rozwiązują magnetometry optyczne, gdyż nie wymagają kosztownego chłodzenia i osiągają podobną precyzję pomiaru. Druga część pracy rozpoczyna się od wprowadzenia liniowego zjawiska Faradaya po to, aby lepiej zrozumieć nieliniowy efekt Faradaya NMOR, który to jest podstawą działania magnetometrów optycznych. To działanie opisano kolejno w trzech krokach. Zaczynając od pompowania optycznego, poprzez ewolucje atomu w zewnętrznym polu magnetycznym, a na detekcji skręcenia płaszczyzny polaryzacji kończąc. Pracę zakończono ograniczeniami tej metody w wyznaczeniu pola magnetycznego w trójwymiarze.

Słowa kluczowe: Magnetometr, Nadprzewodnictwo, SQUID, Magnetometr optyczny, magnetometr wektorowy

Spis treści

Streszczenie	2
Spis treści	3
Wykaz ważniejszych skrótów i oznaczeń	4
1 Wstęp i cel pracy	5
2 Magnetometry nadprzewodzące	8
2.1 Nadprzewodnictwo	8
2.2 Kwantowanie strumienia magnetycznego	9
2.3 SQUID	14
3 Magnetometry optyczne	20
3.1 Zjawisko Faradaya	20
3.2 Zasada działania magnetometrów optycznych	21
3.3 Magnetometr Bella i Blooma	26
3.4 Magnetometr wektorowy	27
4 Podsumowanie	29
Spis rysunków	30
Dodatek A: Spin-1/2	31
Dodatek B: Równanie Schrödingera	35
Literatura	36

Wykaz ważniejszych skrótów i oznaczeń

SQUID - (ang. Superconducting QUantum Interference Device) Nadprzewodzący interferometr kwantowy

MEG - Magnetoencefalografia

EEG - Elektroencefalografia

MSR - (ang. Magnetically shielded room) Pomieszczenie ekranowane magnetycznie

CJD - (ang. Creutzfeldt-Jakob disease) Choroba Creutzfeldta-Jakoba

MGC - Magnetokardiografia

EKG - Elektrokardiografia

NMOR - (ang. Nonlinear Magneto-Optical Rotation) Nieliniowa rotacja magneto-optyczna

1 Wstęp i cel pracy

Pole magnetyczne jesteśmy w stanie mierzyć dosyć długo, bo już prawie dwieście lat temu Gauss podał bezwzględną wartość pola magnetycznego Ziemi. Wynosi ono około 5×10^{-5} Tesli (T). Dokładna wartość zależy od naszego położenia na Ziemi i zmienia się w czasie. Natomiast po raz pierwszy tego typu pomiary w medycynie wykorzystał dopiero pięćdziesiąt lat temu David Cohen [1]. Zarejestrował on bardzo słabe pole magnetyczne wokół czaszki pochodzące od aktywnego elektrycznie mózgu. Pole to jest rzędu 10^{-14} T i jego detekcja wymaga precyzyjnych magnetometrów. Pomiary Cohena były możliwe dzięki SQUID-om, nadprzewodzącym interferometrom kwantowym, wynalezionym kilka lat wcześniej, które są podstawowym elementem działania ówczesnych jak i współczesnych magnetometrów.

Magnetoencefalografia (MEG) jest jedną z metod encefalograficznych, tj. metod obrazowania działania mózgu. W porównaniu do popularniejszej elektroencefalografii (EEG), która bezpośrednio bada bioelektryczne czynności mózgu, MEG obrazuje te czynności poprzez rejestrowanie pola magnetycznego. Encefalografie można stosować u niezdiagnozowanych pacjentów po wcześniejszym porównaniu różnic parametrów w grupie osób zdrowych z odpowiednimi parametrami u osób chorych. Powszechność EEG wynika ze względnie niskiego skomplikowania sprzętu, można je wykonać w prawie każdym szpitalu, ponieważ pole elektryczne wytwarzane przez mózg jest relatywnie łatwo mierzalne. Sygnał EEG w okolicy czaszki jest rzędu $10 - 100 \mu\text{V}$ zaś, dla porównania, dokładność pomiaru napięcia typowego multimetra jest rzędu mV.

Magnetometr to czujnik, który może mierzyć zarówno wartość jak i kierunek oraz zmiany pola magnetycznego czy też zbadać własności magnetyczne materii. Magnetometry wykorzystywane w medycynie są wciąż bardzo drogie i raczej niedostępne. Natężenie pól biomagnetycznych wymaga pomiarów w specjalnie przygotowanych magnetycznie odizolowanych pomieszczeniach (MSR). Co więcej, zastosowanie metod bazujących na nadprzewodnikach wymaga stałego chłodzenia układu mierniczego. W rezultacie tego typu urządzenia do wykonywania MEG są duże i skomplikowane, jak pokazuje Rys. 1. Nie są one również komfortowe w użyciu, gdyż niektórzy pacjenci mogą mieć obiekcje przed umieszczeniem głowy w odległości centymetra od pojemnika w temperaturze poniżej -200 stopni Celsjusza. Skomplikowany sprzęt pozwala natomiast utrzymać wysoką dokładność detekcji niewielkich pól magnetycznych wokół czaszki pacjenta. O tym dlaczego warto rozwijać tę metodę, mimo wysokich kosztów i innych trudności można sobie uświadomić czytając statystyki na temat



Rysunek 1: Urządzenie do magnetoencefalografii Elekta Neuromag TRIUX. Nad pacjentem znajduje się m.in. układ chłodzenia wymagany do działania nadprzewodzących interferometrów kwantowych, mierzących precyzyjnie pole magnetyczne mózgu.

choroby Creutzfeldta-Jakoba (CJD). Okazuje się, że wśród 97 pacjentów w wieku od 26 do 83 roku życia, u których stwierdzono tę przypadłość neurologiczną, tylko 17 zostało poprawnie zdiagnozowanych za pierwszym razem. Łącznie pacjenci usłyszeli 373 różne diagnozy co daje aż 3,8 diagnozy na pacjenta [2]. Typowe metody diagnozowania CJD to EEG, tomografia komputerowa oraz obrazowanie metodą rezonansu magnetycznego. Kiedy stawką jest ludzkie życie nie można sobie pozwolić na zbyt wiele błędów, dlatego tak ważny może okazać rozwój magnetometrów w kierunku ich rentowności i powszechności. Każda nowa metoda, mierząca niezależny sygnał biologiczny taki jak np. pole biomagnetyczne, dostarcza nowych informacji o pacjencie przez co zwiększa szansę poprawnej diagnozy.

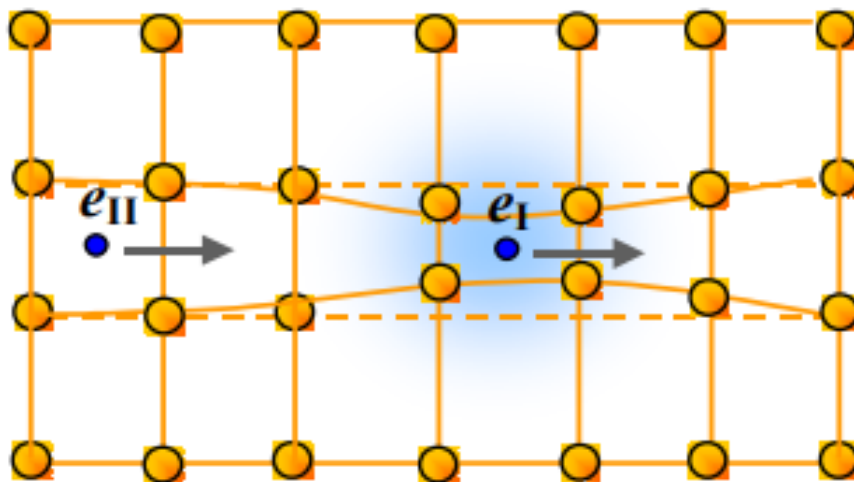
Magnetometry mają szeroki wachlarz zastosowań, w samej medycynie poza wykonywaniem MEG możliwa jest również magnetokardiografia (MGC) [3]. Podczas pracy serca na skutek różnych stężeń jonów sodu oraz potasu wewnątrz i na zewnątrz komórek mięśnia sercowego dochodzi do polaryzacji błony komórkowej. Różnice potencjałów można mierzyć odpowiednio rozłożonymi na ciele elektrodami podczas elektrokardiografii (EKG) ale dzięki równaniom Maxwella wiemy, że prąd elektryczny jest nierozłączny z wytwarzanym wokół niego polem magnetycznym, które to możemy mierzyć podczas MGC. To nie koniec zastosowań w medycynie, na podobnej zasadzie jesteśmy w stanie badać pola magnetyczne żołądka czy też tkanki mięśniowej. Postęp nauki udowadnia nam, że nie musimy wszystkiego dotknąć aby stwierdzić, że coś istnieje np. inwazyjne zbadanie Ziemi byłoby problematyczne. Z pomocą przychodzi magnetometria, która jako jedna z dziedzin geofizyki pozwala nieinwazyjnie zajrzeć w głąb Ziemi. Tym sposobem jesteśmy w stanie poszukiwać minerałów takich jak diamenty czy ropa i zaplanować odwierty w celu ich wydobywania. Możemy również tworzyć mapy potencjalnych znalezisk archeologicznych ale też analizować położenie i ruchy płyt tektonicznych. Pole magnetyczne wydaje się być wszędzie i w badaniach nad nim nie ogranicza nas nawet nasza planeta Ziemia. Od lat budujemy statki kosmiczne, które podczas eksplorowania kosmosu, były w stanie m. in. zbadać otaczające nas planety i księżycy ale też Słońce pod kątem ich pola magnetycznego. Umożliwiło to np. wykrycie wiatru słonecznego, który bezpośrednio wpływa na kształt magnetosfery Ziemi.

Celem tej pracy jest przybliżenie praw fizyki, które odpowiadają za działanie nadprzewodzących magnetometrów jak również przegląd dostępnych rozwiązań w tej dziedzinie. Następnie skupimy się na atomowych magnetometrach optycznych. W skrócie są to urządzenia, w których pomiar zewnętrznego pola magnetycznego odbywa się poprzez obserwację polaryzacji wiązki światła przechodzącej przez chmurę atomową umieszczoną w zewnętrznym polu. Podstawową zaletą tego rodzaju sensorów jest fakt, że mogą one operować w temperaturze pokojowej. Znika więc problem chłodzenia nadprzewodników i przez to pojawia się szansa miniaturyzacji urządzenia pomiarowego. Jednocześnie precyzja atomowych magnetometrów optycznych nie odbiega od urządzeń opartych na SQUID-ach. Dzięki operowaniu w temperaturze pokojowej sensor atomowy można bezpiecznie zbliżyć do czaszki bardziej niż układ nadprzewodzący, przez co zyskujemy również na wielkości mierzonego pola magnetycznego gdyż bliżej czaszki jest ono większe (zanika z odległością przynajmniej jak r^{-3}). Naszym celem jest opis teoretyczny zasady działania takich magnetometrów.

2 Magnetometry nadprzewodzące

2.1 Nadprzewodnictwo

Wyjaśnienie działania magnetometrów medycznych zawierających w sobie SQUID-y należy zacząć od kilku słów na temat nadprzewodnictwa. Niniejszy podrozdział w dużej mierze bazuje na dyskusji w książce Kittla [5]. Pewne materiały poniżej charakterystycznej dla siebie temperatury krytycznej osiągają zerowy opór elektryczny – stają się nadprzewodnikami. Pionierem był tutaj Heike Kamerlingh Onnes z Uniwersytetu w Leidzie, który w 1911 roku przebadął próbkę rtęci w temperaturach rzędu kilku Kelwinów, za co dwa lata później otrzymał Nagrodę Nobla. Poza brakiem oporu elektrycznego podstawową cechą materiałów w stanie nadprzewodzącym jest efekt Meissnera. Tym razem jest to właściwość magnetyczna, mianowicie w słabym polu magnetycznym nadprzewodnik zachowuje się jak idealny diama-
getyk. Oznacza to, że strumień magnetyczny, który powyżej temperatury krytycznej materiału przenikał go, poniżej tej temperatury zostaje wypchnięty z badanej próbki. Zjawiska te bardzo dobrze tłumaczy teoria BCS z 1957 roku. Nazwa teorii pochodzi od pierwszych liter nazwisk jej twórców: Johna Bardeena, Leona Coopera oraz Roberta Shrieffera, za co również otrzymali później Nagrodę Nobla. Teoria BCS wprowadza funkcje falową BCS, która opisuje różne możliwości łączenia cząstek m. in. łączenie elektronów w pary Coopera. Schemat powstawania wspomnianych par elektronów widoczny jest na Rys. 2.



Rysunek 2: Para Coupera: Pierwszy elektron wzbudza fonon poprzez zagęszczenie dodatnich jonów, natomiast drugi elektron zostaje przyciągnięty (zaabsorbowanie fononu). [4]

Kiedy pojedynczy swobodny elektron porusza się w schłodzonej sieci krystalicznej, oddziałuje z nią miejscowo przyciągając otaczające go kationy. Dodatnie jony wracają później do pierwotnego położenia ale kumulują się wokół poruszającego się elektronu tworząc falę. Fala ta może się wygasić, ale może też skorelować ruch elektronu z drugim elektronem o przeciwnym spinie, który został przyciągnięty przez miejscową kumulację kationów. Taki ruch sieci krystalicznej nazywany jest fononem i jest on możliwy dzięki niskiej temperaturze, ponieważ nie ma wystarczającej energii cieplnej aby rozzerwać powstałą parę elektronów. Jest to ciekawe z tego względu, że pojedyncze elektrony, tworzące parę Coopera, są fermionami o spinach połówkowych skierowanych w przeciwnych kierunkach. Natomiast po ich połączeniu wypadkowy spin jest całkowity co oznacza, że para Coopera pod wieloma względami zachowuje się jak bozon. Zatem nie ogranicza ich zakaz Pauliego ani nie dotyczy ich rozkład Fermiego-Diraca. Bozony opisuje statystyka Bosego-Einsteina, a w temperaturach poniżej temperatury krytycznej dochodzi do kondensacji Bosego-Einsteina. Umożliwia to poruszanie się wzdłuż przewodnika bez oporu elektrycznego, co oznacza właśnie stan nadprzewodzący przewodnika.

2.2 Kwantowanie strumienia magnetycznego

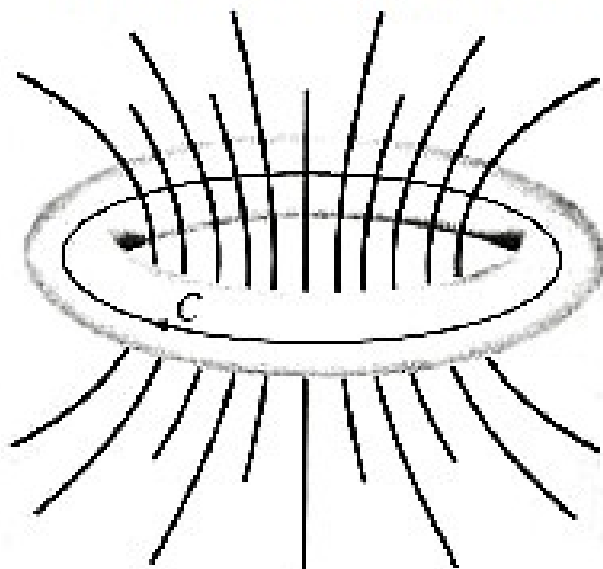
Na podstawie doświadczeń z nadprzewodzącymi pierścieniami można stwierdzić, że całkowity strumień magnetyczny przecinający pierścień przybiera tylko skwantowane wartości i są one całkowitymi wielokrotnościami kwantu $\frac{h}{q}$, gdzie $q = -2e$. Można to udowodnić analizując pierścień w stanie nadprzewodzącym, widoczny na Rys. 3.

Wyobrażamy sobie, że nośnikami prądu nadprzewodzącego są cząstki kwantowe o ładunku elektrycznym q . Jak dziś wiadomo są to pary Coopera o ładunku $q = -2e$. W związku z tym opisujemy je funkcją falową. W odróżnieniu od „standardowych” funkcji falowych, które unormowane są do jedynki (by ich moduł w kwadracie był miarą gęstości prawdopodobieństwa) funkcję falową opisującą nadprzewodzące nośniki $\psi(\vec{r})$ normujemy do całkowitej ilości tych nośników:

$$\int |\psi(\vec{r})|^2 dV = N, \quad (1)$$

gdzie całkujemy po objętości pierścienia, zaś $N = \int n(\vec{r}) dV$ jest całkowitą ilością nośników o koncentracji $n(\vec{r})$. Zakładamy teraz, że w każdym punkcie nadprzewodzącej pętli mamy tyle samo nośników, $n(\vec{r}) = n$, czyli gęstość prawdopodobieństwa znalezienia ładunków jest stała

linie strumienia magnetycznego



Rysunek 3: Rozważana sytuacja doświadczalna. Nadprzewodzący pierścień umieszczony jest w zewnętrznym polu magnetycznym. C jest konturem wewnątrz pierścienia wzdłuż którego liczymy całkę liniową opisaną w tekście. Rysunek z [5].

wokół pierścienia:

$$|\psi(\vec{r})|^2 = \psi^* \psi = \text{const} = n. \quad (2)$$

W ogólności funkcja falowa jest wielkością zespoloną, która oprócz gęstości prawdopodobieństwa znalezienia nośników w danym miejscu zawiera informację o fazie tych nośników:

$$\psi(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})| e^{i\theta(\vec{r})} = \sqrt{n} e^{i\theta(\vec{r})}. \quad (3)$$

Tak więc tylko faza zależy od położenia w pierścieniu.

Aby wyliczyć prąd nadprzewodzący i następnie kwantyzację strumienia magnetycznego przypomnijmy potencjały występujące w elektromagnetyzmie. Są to potencjał elektryczny ϕ , którego minus gradient jest natężeniem pola elektrycznego \vec{E} oraz magnetyczny potencjał wektorowy \vec{A} , którego rotacja wyraża pole magnetyczne \vec{B}

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (4)$$

Uzbrojeni w powyższe idee prąd, który płynie w nadprzewodzącym pierścieniu wyliczamy mnożąc przez ładunek wzór na prąd prawdopodobieństwa znany z mechaniki kwantowej [7]:

$$\vec{j} = \frac{q}{2m} \left[(\psi^* \vec{p} \psi - \psi \vec{p} \psi^*) - 2q\vec{A} |\psi|^2 \right]. \quad (5)$$

Obliczymy teraz człony po prawej stronie by wykazać, że $\psi \vec{p} \psi^* = -\psi^* \vec{p} \psi$. Najpierw zauważmy, że z definicji operatora pędu mamy:

$$\begin{aligned}
 \psi^* \vec{p} \psi &= \sqrt{n} e^{-i\theta(\vec{r})} \left(-i\hbar \vec{\nabla} \right) \sqrt{n} e^{i\theta(\vec{r})} \\
 &= \sqrt{n} e^{-i\theta(\vec{r})} (-i\hbar) \sqrt{n} i e^{i\theta(\vec{r})} \vec{\nabla} \theta(\vec{r}) \\
 &= n\hbar e^{i\theta(\vec{r})-i\theta(\vec{r})} \vec{\nabla} \theta(\vec{r}) \\
 &= n\hbar \vec{\nabla} \theta(\vec{r}) = n\hbar \vec{\nabla} \theta,
 \end{aligned} \tag{6}$$

gdzie w ostatniej linijce uprościliśmy notację nie pisząc jawnie zależności od \vec{r} w fazie. Te same kroki prowadzą do:

$$\begin{aligned}
 \psi \vec{p} \psi^* &= \sqrt{n} e^{i\theta(\vec{r})} \left(-i\hbar \vec{\nabla} \right) \sqrt{n} e^{-i\theta(\vec{r})} \\
 &= \sqrt{n} e^{i\theta(\vec{r})} (-i\hbar) \sqrt{n} (-i) e^{-i\theta(\vec{r})} \vec{\nabla} \theta(\vec{r}) \\
 &= -n\hbar e^{i\theta(\vec{r})-i\theta(\vec{r})} \vec{\nabla} \theta(\vec{r}) \\
 &= -n\hbar \vec{\nabla} \theta = -\psi^* \vec{p} \psi.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Korzystając z ostatniej równości, wzór na prąd upraszcza się:

$$\vec{j} = \frac{q}{m} \left(\psi^* \vec{p} \psi - q\vec{A} |\psi|^2 \right). \tag{8}$$

Wstawiając założoną formę funkcji falowej otrzymujemy:

$$\vec{j} = \frac{nq}{m} \left(\hbar \vec{\nabla} \theta - q\vec{A} \right). \tag{9}$$

Z efektu Meissnera prąd w nadprzewodniku znika $\vec{j} = 0$. Otrzymujemy więc prosty wzór na potencjał wektorowy:

$$\vec{A} = \frac{\hbar}{q} \vec{\nabla} \theta. \tag{10}$$

Strumień magnetyczny wyliczamy z definicji:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \vec{d}a, \tag{11}$$

gdzie całkowanie jest po powierzchni rozpiętej przez pierścień (przez kontur C na Rys. 3). Aby zastosować wyrażenie na potencjał wektorowy, przypomnijmy równość (4):

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \vec{d}a = \int (\text{rot} \vec{A}) \cdot \vec{d}a. \tag{12}$$

Z twierdzenia Stokesa całkę powierzchniową z rotacji przepisujemy na całkę krzywoliniową po pierścieniu:

$$\Phi_B = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (13)$$

Możemy teraz zastosować wzór (10) by otrzymać:

$$\Phi_B = \frac{\hbar}{q} \oint \vec{\nabla} \theta \cdot d\vec{l}. \quad (14)$$

Całka z gradientu dana jest przez różnicę funkcji pod gradientem na brzegach rozważanego przedziału, czyli:

$$\Phi_B = \frac{\hbar}{q} [\theta(2\pi) - \theta(0)]. \quad (15)$$

Spójrzmy na naszą funkcję falową jak na sinusoidę, która rozchodzi się w nadprzewodzącym pierścieniu widocznym na Rys. 3. Wybierając dowolny punkt w pierścieniu, fala będzie przechodzić przez niego z każdym okrążeniem i chcemy żeby za każdym razem była zgodna w fazie co jest opisane wzorami (16) oraz (17). Tylko wtedy superpozycja nałożonych na siebie fal prowadzi do konstruktywnej interferencji. W każdym innym przypadku różnica amplitud prowadzi do całkowitego wygaszenia fali. Te dwie możliwości pokazane są na Rys. 4. Stąd

$$\Phi_B = \frac{\hbar}{q} 2\pi k, \quad \text{gdzie } k = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Upraszczając dalej:

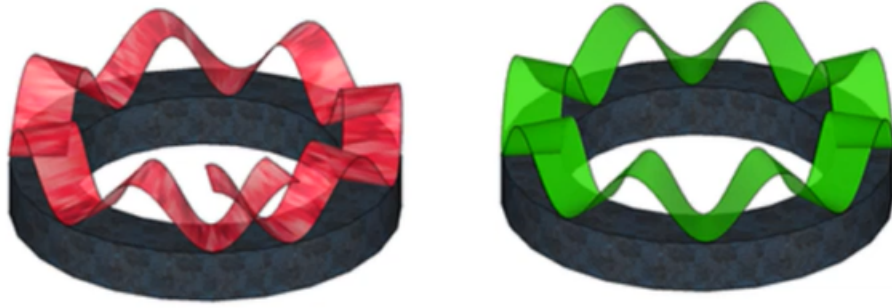
$$\Phi_B = k \frac{h}{q}, \quad \text{gdzie } k = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Kiedy $k = 1$ strumień magnetyczny przyjmuje swoją najmniejszą możliwą wartość, a zatem można go oznaczyć jako Φ_0 :

$$\Phi_0 = \frac{h}{-2e} = \frac{6,6261 \times 10^{-34}}{2 \times 1,6022 \times 10^{-19}} \left[\frac{J \cdot s}{C} = \frac{kg \cdot m^2 \cdot s}{s^2 \cdot A \cdot s} = T \cdot m^2 = Wb \right] \\ \Phi_0 = 2,0678 \text{ Wb} \quad (18)$$

Opisany równaniem (18) kwant strumienia magnetycznego Φ_0 nazywany jest fluksonem. Dodajmy, że na strumień magnetyczny przez powierzchnię rozpiętą przez nasz nadprzewodzący pierścień składają się przyczynki od zewnętrznego pola magnetycznego oraz od pola magnetycznego produkowanego przez prąd nadprzewodzący.

Na koniec chciałbym przedstawić intuicyjny argument przemawiający za kwantowaniem strumienia magnetycznego przez nadprzewodzący pierścień. Argument ten podobny jest w duchu do argumentu de Broglie'a za kwantowaniem momentu pędu elektronów w atomach.



Rysunek 4: Po prawej stronie zwizualizowana jest interferencja kolejno nachodzących na siebie fal, natomiast po lewej stronie widoczne jest przesunięcie w fazie prowadzące do wygaszenia fali. [6]

Za de Broglie'm postulujemy, że z pędem cząstki związana jest fala materii o następującej własności

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (19)$$

Wielokrotność tej długości musi zgadzać się z długością obwodu pierścienia jak opisałem to przy okazji Rys. 4, tj.

$$n\lambda = 2\pi R, \quad (20)$$

gdzie R jest promieniem pierścienia. Zakładamy teraz, że dla naładowanej cząstki w polu magnetycznym odpowiedni pęd dany jest przez

$$\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}. \quad (21)$$

Policzmy cyrkulację tego pędu po pierścieniu:

$$\oint \vec{p} \cdot d\vec{l} = m \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} + q \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}. \quad (22)$$

Z postulatu de Broglie'a całka po lewej stronie dana jest przez:

$$\oint \vec{p} \cdot d\vec{l} = \frac{h}{\lambda} \oint dl = \frac{h}{\lambda} 2\pi R = nh, \quad (23)$$

gdzie w ostatnim równaniu użyto wzoru (20). Powracając do równania (22), w drugiej całce po prawej stronie rozpoznajemy strumień magnetyczny. Jeśli więc udałooby nam się pokazać, że pierwsza całka po prawej stronie znika otrzymujemy poprawny warunek kwantowania strumienia magnetycznego:

$$\Phi_B = n \frac{h}{q}. \quad (24)$$

Niestety dotychczas nie udało mi się wykazać, że pierwsza całka znika.

2.3 SQUID

SQUID-y czyli nadprzewodzące interferometry kwantowe stanowią podstawę działania magnetometrów używanych w medycynie. Na każdy neuron w ludzkim mózgu można spojrzeć jak na dipol magnetyczny, który jest źródłem pola magnetycznego. Sieć neuronów tworzy wspólne pole magnetyczne, które jest dobrze określone i każde zaburzenie w postaci tętniaka, udaru czy też guza mózgu może być wykryte i rozpoznane dzięki SQUID-om. Zanim więcej o samych SQUID-ach to ich działanie jest możliwe dzięki złączu Josephsona. W złączu dwa kawałki nadprzewodnika rozdzielone są najczęściej cienką warstwą dielektryka czyli dobrego izolatora, nadprzewodniki może również rozdzielać metal, który nie jest nadprzewodnikiem. Tunelowanie elektronów było znane już wcześniej jednak Brian David Josephson przewidział, że tunelować mogą również pary Coopera za co w 1973 roku otrzymał Nagrodę Nobla. Zapisał on dwa równania, które później zostały nazwane prawami od jego nazwiska. Pierwsze prawo Josephsona mówi o natężeniu prądu płynącego przez złącze i wyrażone jest wzorem:

$$I = I_c \sin \Delta\Phi, \quad (25)$$

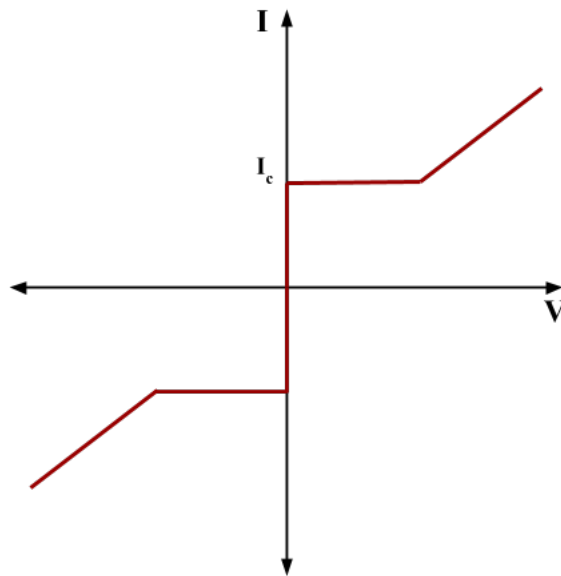
gdzie I_c jest stałą zależną od temperatury i zewnętrznego pola magnetycznego, natomiast $\Delta\Phi$ jest różnicą faz funkcji falowych par Coopera znajdujących się w nadprzewodnikach po obydwu stronach złącza. Drugie prawo Josephsona ma zastosowanie kiedy przez złącze przepływa prąd o napięciu $U(t)$, wtedy pochodna po czasie różnicy faz wyraża się następująco:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta\Phi = \frac{2e}{\hbar} U(t). \quad (26)$$

Rys. 5 opisuje stałoprądowy efekt Josephsona za pomocą charakterystyki prądowo-napięciowej. Początek i koniec wykresu wskazuje na nie zmieniającą się rezystancję jak przy zwykłym oporniku, jednak przy wartości napięcia $|V|$ rzędu poniżej $1mV$ oraz natężenia $|I|$ poniżej kilkudziesięciu μA wszelkie opory zanikają i możemy obserwować tunelowanie par Coopera przez złącze Josephsona. Na charakterystyce zaznaczone jest również natężenie krytyczne I_c , które pojawiło się już wcześniej w pierwszym prawie Josephsona (25). Przedstawiona charakterystyka jest symetryczna względem przecięcia osi układu współrzędnych.

Wyróżnia się dwa typy SQUID-ów, różnią się one przede wszystkim prądami, które przez nie przepływają oraz ilością złącz Josephsona:

RF SQUID „Radio Frequency” SQUID operowany jest prądem zmiennym o bardzo wysokich częstotliwościach radiowych. Zawiera tylko jedno złącze Josephsona w swoim nadprze-

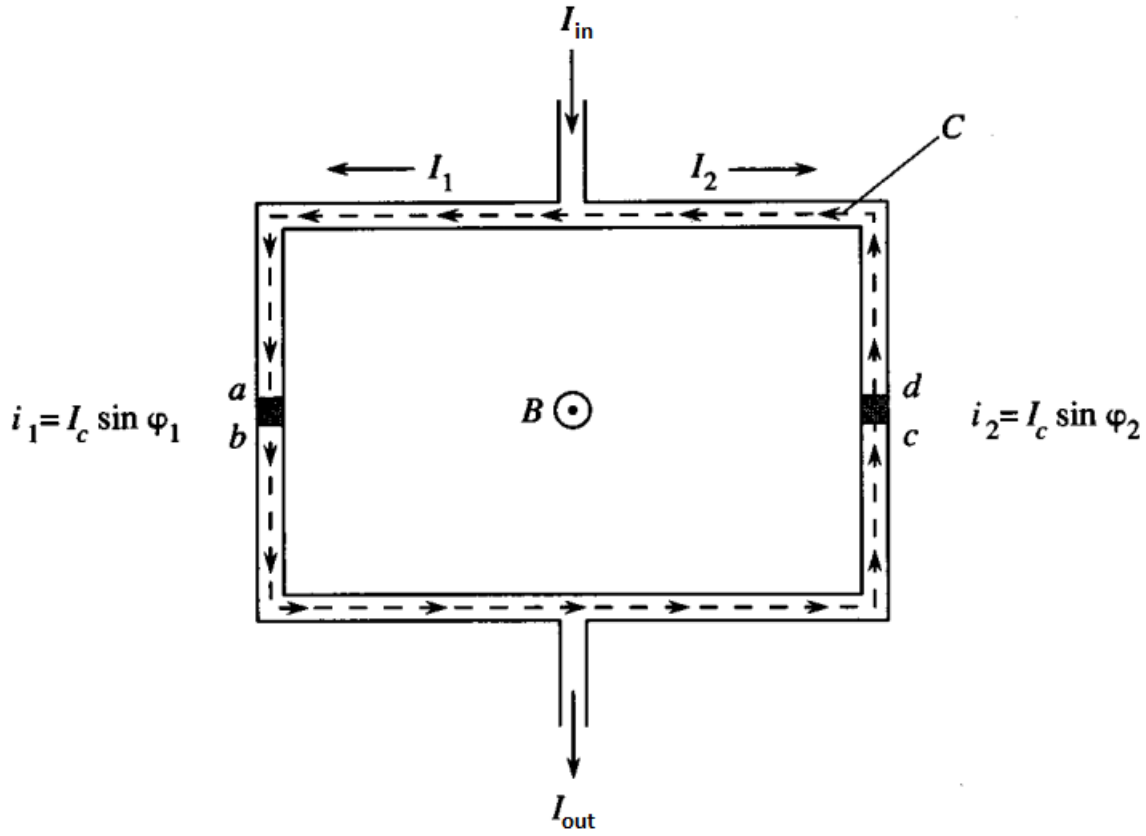


Rysunek 5: Teoretyczna charakterystyka prądowo-napięciowa dla złącza Josephsona przy stałym prądzie operującym [8].

wodzącym obwodzie. Nie jest podłączony do przewodów ale za to jest indukcyjnie połączony z drgającym układem LC, który odpowiada za prąd zmienny i magazynowanie energii. Ze względu na zewnętrzne pole magnetyczne SQUID działa trybie rezystywnym. Dąży się do tego aby napięcie w obwodzie wyrażone okresową funkcją strumienia magnetycznego miało okres o wartości fluksona (18). W porównaniu ze SQUID-em stałoprądowym jest mniej czuły, a zatem mniej użyteczny i dlatego to DC SQUID jest używany komercyjnie.

DC SQUID „Direct Current” SQUID czyli kwantowy interferometr operowany prądem stałym. Zawiera nie jedno lecz dwa złącza Josephsona i opiera się na wspomnianym wcześniej stałoprądowym efekcie Josephsona. Rys. 6 przedstawia schemat takiego SQUID-u i posłuży teraz do wyznaczenia natężenia prądu na wyjściu oraz strumienia magnetycznego w obwodzie.

Prąd I_{in} na wejściu zgodnie z pierwszym prawem Kirchhoffa rozdziela się na prądy I_1 oraz I_2 . Prądy te przepływają przez złącza Josephsona, a więc ich wartości są zgodne z pierwszym prawem Josephsona (25). Dodatkowo ze względu na zewnętrzne pole magnetyczne \vec{B} w obwodzie pojawia się prąd ekranujący I_E , który w pierwszym ramieniu



Rysunek 6: Schemat stałoprądowego SQUID-u z naniesionymi prądami [9].

skierowany jest zgodnie z kierunkiem prądu $I_1 + I_E$, natomiast w drugim ramieniu skierowany jest przeciwnie $I_2 - I_E$. Prąd na wyjściu jest sumą prądów rozdzielonych na wejściu. Korzystając ze wzoru trygonometrycznego na sumę sinusów otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 I_{out} &= I_1 + I_E + I_2 - I_E = I_c \sin \phi_1 + I_c \sin \phi_2 \\
 &= 2I_c \cos \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) \sin \left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{27}$$

Rys. 6 zawiera również wektor indukcji magnetycznej \vec{B} oraz kontur C , którego użyjemy do wyliczenia prądu na wyjściu. Zaznaczone są także punkty a, b, c oraz d , na granicach złącz czyli barier tunelowych i posłużą do zbadania różnic w fazie na całym obwodzie. Mając punkty a, b, c i d oraz wiedząc, że całka po konturze C z gradientu fazy musi być wielokrotnością 2π można zapisać:

$$\oint_C \nabla \theta \cdot dl = 2\pi n = (\theta_b - \theta_a) + (\theta_c - \theta_b) + (\theta_d - \theta_c) + (\theta_a - \theta_d) \tag{28}$$

Wyliczymy teraz po kolei każdą różnicę faz pamiętając, że składa się ona z przyczynku od prądu nadprzewodzącego oraz od potencjału wektorowego. Zaczniemy od różnicy faz na pierwszym złączu:

$$(\theta_b - \theta_a) = -\phi_1 - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_a^b \vec{A} \cdot \vec{dl}. \quad (29)$$

Różnica ϕ_1 pochodzi od prądu, zaś przyczynęk od potencjału otrzymujemy ze wzoru (10). $\Phi_0 = q/h$ oznacza flukson. Podobnie na drugim złączu,

$$(\theta_d - \theta_c) = \phi_2 - \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_c^d \vec{A} \cdot \vec{dl}, \quad (30)$$

gdzie różnica znaku przy ϕ_2 pochodzi od tego, że wzdłuż konturu C przechodzimy pod prąd w prawym złączu Josephsona. Pozostałe dwie różnice faz nie dotyczą złączy tylko przewodów nadprzewodzących i wynoszą:

$$(\theta_c - \theta_b) = -\frac{2\pi}{\Phi_0} \int_b^c \vec{A} \cdot \vec{dl}, \quad (31)$$

$$(\theta_a - \theta_d) = -\frac{2\pi}{\Phi_0} \int_d^a \vec{A} \cdot \vec{dl}. \quad (32)$$

Po zsumowaniu tych czterech różnic faz otrzymujemy:

$$2\pi n = \phi_2 - \phi_1 - \frac{2\pi}{\Phi_0} \oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl} = \phi_2 - \phi_1 - 2\pi \frac{\Phi_B}{\Phi_0}, \quad (33)$$

gdzie Φ_B jest strumieniem magnetycznym przez pierścień. Stąd wzór na różnicę faz:

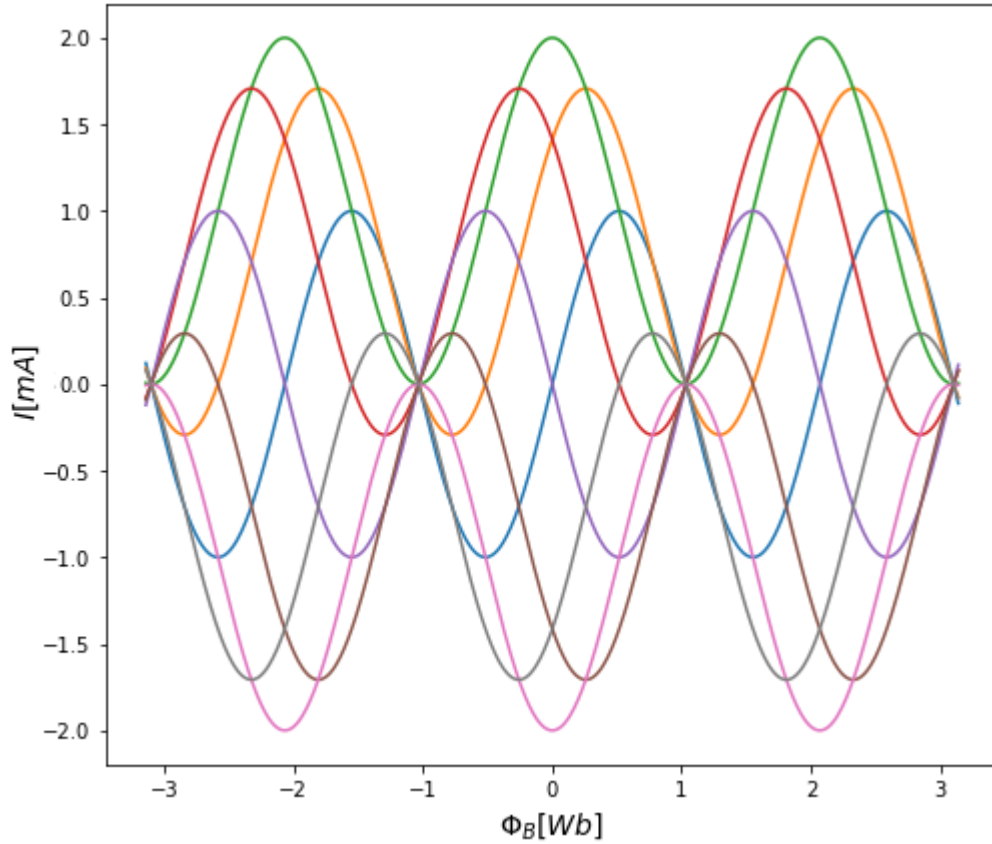
$$\phi_1 - \phi_2 = 2\pi n + \frac{2\pi\Phi_B}{\Phi_0} \quad (34)$$

Po użyciu tej formuły w (27) otrzymujemy prąd na wyjściu z urządzenia:

$$I_{out} = 2I_c \cos\left(\frac{\pi\Phi_B}{\Phi_0}\right) \sin\left(\phi_1 + \frac{\pi\Phi_B}{\Phi_0}\right), \quad (35)$$

gdzie w argumencie sinusa wstawiliśmy ϕ_2 opisane za pomocą ϕ_1 ze wzoru (34).

W ogólności strumień magnetyczny przez nadprzewodzącą pętlę dany jest przez sumę strumienia od pola zewnętrznego Φ_{ext} oraz od samoindukcyjności $L(I_1 - I_2)/2$. Zakładam teraz, że natężenia prądów w obu ramionach są takie same, a zatem samoindukcyjność nic nie wnosi i strumień magnetyczny jest dany wyłącznie przez człon od pola zewnętrznego. Jak widać we wzorze (35) występuje nieznana faza ϕ_1 . Zobaczmy teraz jak wygląda prąd na wyjściu dla kilku różnych faz ϕ_1 .



Rysunek 7: Wykres zależności prądu na wyjściu od strumienia magnetycznego dla ośmiu wybranych faz $\phi_1 = k\pi/4$ gdzie $k = 0, 1, \dots, 7$ w SQUID-zie stałoprądowym. Przyjęto, że $I_c = 1$ mA.

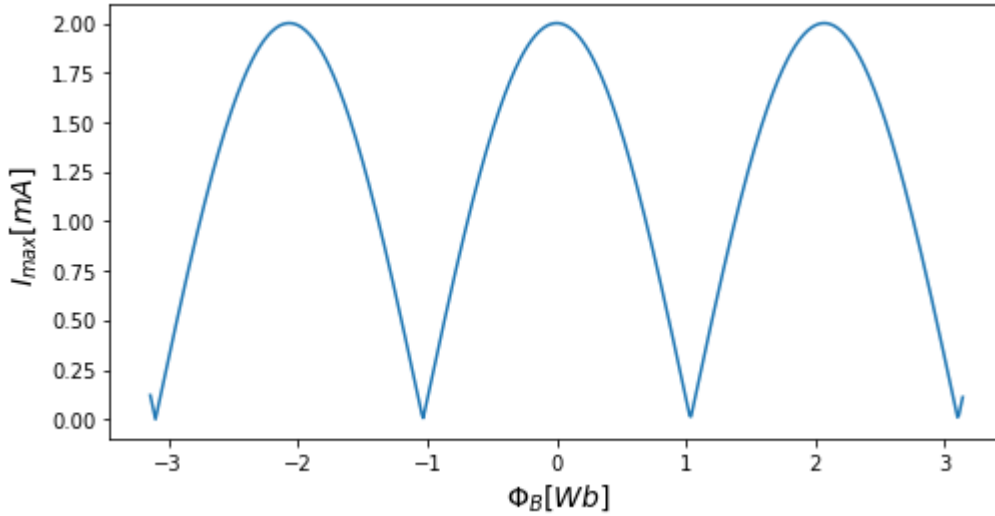
Z Rys. 7. można odczytać, że maksymalne wartości natężenia I_{max} zmieniają się w cykliczny sposób w zależności od wybranej fazy ϕ_1 . Chcąc zbadać jak dokładnie zmienia się I_{max} należy policzyć ekstremum:

$$\frac{dI}{d\phi_1} = 0. \quad (36)$$

Warunek ten spełniony jest kiedy $\cos\left(\phi_1 + \frac{\pi\Phi_B}{\Phi_0}\right) = 0$, a zatem wynika z tego, że również wtedy kiedy $\sin\left(\phi_1 + \frac{\pi\Phi_B}{\Phi_0}\right) = \pm 1$. Stąd maksymalny prąd na wyjściu dany jest przez:

$$I_{max} = 2I_c \left| \cos\left(\frac{\pi\Phi_B}{\Phi_0}\right) \right| \quad (37)$$

i zwizualizowany na Rys. 8.



Rysunek 8: Wykres zależności maksymalnego prądu na wyjściu od strumienia magnetycznego w SQUID-zie stałoprądowym.

Okazuje się, że funkcja (35) jest funkcją okresową o okresie Φ_0 i przyjmuje swoje minima $I_{max} = 0$ dla $\Phi_B = (n + \frac{1}{2}) \Phi_0$. Można określić również maksima $I_{max} = 2I_c$ kiedy $|\cos(\frac{\pi\Phi_B}{\Phi_0})| = 1$. Przyjmuje ona te wartości kiedy strumień magnetyczny jest wielokrotnością fluksona $\Phi_B = n\Phi_0$. Powyższe rozważanie potwierdza słuszność kwantyzacji strumienia magnetycznego. Wyprowadzony w poprzednim podrozdziale warunek kwantowania strumienia magnetycznego (24) jest spełniony kiedy prąd na wyjściu w SQUID-zie stałoprądowym przechodzi przez złącza Josephsona, w taki sposób, że sinusy zależne od faz ϕ_1 i ϕ_2 przyjmują swoje maksymalne wartości (Rys. 6). Zauważmy również, że powierzchnia A , przez którą liczymy strumień magnetyczny jest stała i ograniczona przez elementy SQUID-u. Stąd relacja pomiędzy polem magnetycznym i jego strumieniem jest bardzo prosta:

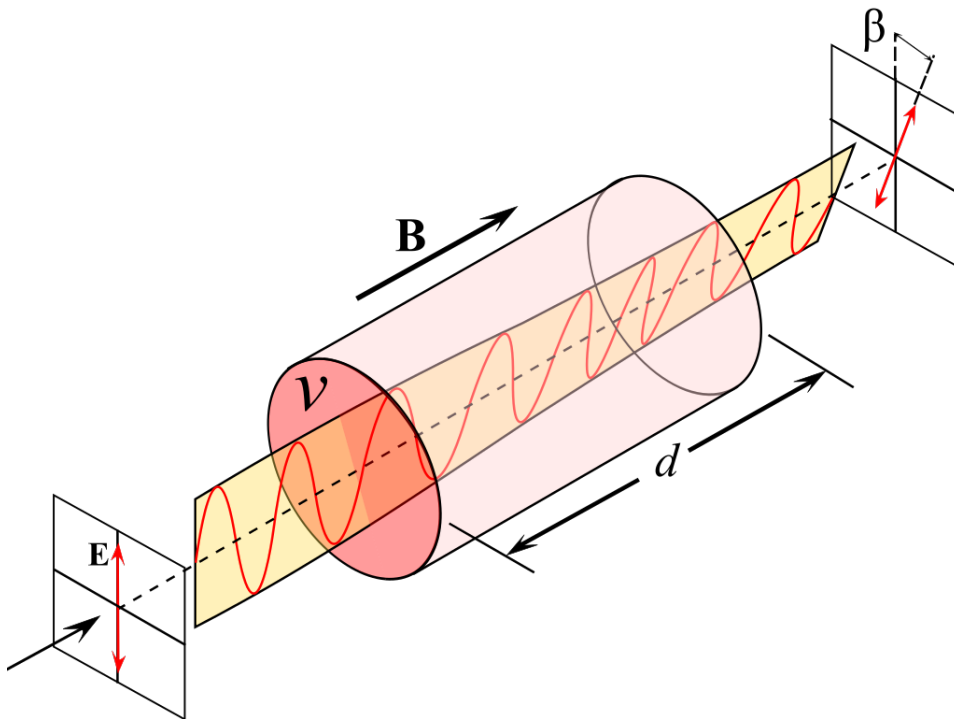
$$\Phi_B = AB. \quad (38)$$

Znajomość Φ_B jest więc jednoznaczna ze znajomością B .

3 Magnetometry optyczne

3.1 Zjawisko Faradaya

Jako pierwszy związek światła z magnetyzmem zauważył Michael Faraday w 1845r. Nazwane jego nazwiskiem zjawisko magnetoptyczne mówi o tym, że spolaryzowane liniowo światło na skutek przechodzenia przez pole magnetyczne \vec{B} ulega obrotowi o kąt β zgodnie z równaniem (39) co jest widoczne na (Rys. 9)



Rysunek 9: Obrót płaszczyzny polaryzacji światła na skutek zjawiska Faradaya [10].

$$\beta = v \cdot B \cdot d \quad (39)$$

gdzie β jest kątem skręcenia, B indukcją magnetyczną w kierunku propagacji światła, d to długość na jakiej światło oddziałuje z polem magnetycznym, natomiast v to stała Verdetta zależna od długości fali, gęstości materiału i temperatury.

Efekt obrotu płaszczyzny polaryzacji można zrozumieć zakładając, że światło spolaryzowane kołowo prawoskrętnie i lewoskrętnie porusza się w namagnetyzowanym materiale z innymi prędkościami. Warunek ilościowy otrzymamy stosując wektory Jonesa do opisu

polaryzacji. Liniowo spolaryzowane wzdłuż osi X światło padające można zapisać jako superpozycję fali spolaryzowanych kołowo:

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{r} + \hat{l}) \quad (40)$$

Po przejściu przez materiał, faza pomiędzy składowymi o polaryzacji kołowej ulega zmianie ze względu na różne prędkości rozchodzenia się światła:

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{r} + \hat{l}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{r} + e^{i\varphi}\hat{l}) \quad (41)$$

Faza ta prowadzi do obrotu polaryzacji liniowej jak widać z następującego rozważania:

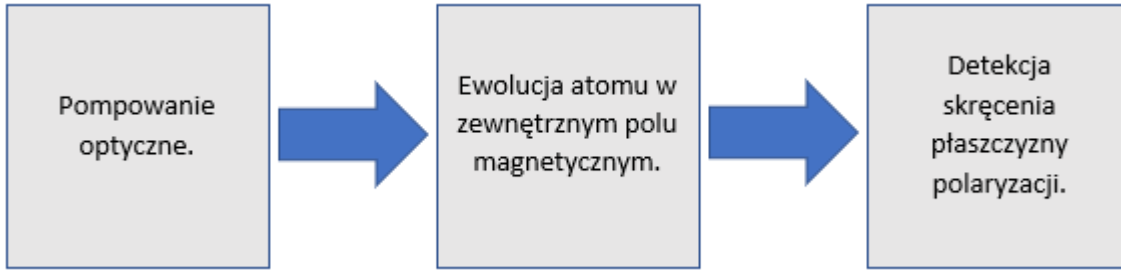
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{r} + e^{i\varphi}\hat{l}) &= \frac{1}{2}(1 + e^{i\varphi})\hat{x} + \frac{i}{2}(1 - e^{i\varphi})\hat{y} \\ &= e^{i\varphi/2} \left(\frac{1}{2}(e^{-i\varphi/2} + e^{i\varphi/2})\hat{x} + \frac{i}{2}(e^{-i\varphi/2} - e^{i\varphi/2})\hat{y} \right) \\ &= \cos \frac{\varphi}{2} \hat{x} + \sin \frac{\varphi}{2} \hat{y}. \end{aligned} \quad (42)$$

W pierwszej linijce użyliśmy definicji polaryzacji kołowej w terminach polaryzacji liniowych wzdłuż osi X i Y , w drugiej linijce wyłączyliśmy wspólny czynnik fazowy $e^{i\varphi/2}$. Faza ta jest taka sama w obu składowych, można ją więc zignorować gdyż jest nieobserwowalna. W ostatniej linijce użyliśmy wzór Eulera. Ostatecznie wejściowe światło spolaryzowane wzdłuż osi X wychodzi z materiału spolaryzowane liniowo wzdłuż osi pod kątem $\varphi/2$ od osi X . W praktyce magnetometrii optycznej również wykorzystują obrót liniowej polaryzacji światła, ale obrót ten jest proporcjonalny do wyższych potęg B . Nie będę opisywał tej zależności szczegółowo, skupię się na ogólniejszym modelu działania magnetometru.

3.2 Zasada działania magnetometrów optycznych

Działanie magnetometrów optycznych można koncepcyjnie przedstawić w trzech kolejnych etapach widocznych na Rys. 10.

Do opisu poniższego funkcjonowania magnetometrów optycznych w głównej mierze jako źródło posłużyła książka wydana w Cambridge o tytule „Optical Magnetometry” [12]. W pierwszym etapie wykonywane jest pompowanie optyczne, odpowiada ono za polaryzację atomową — przygotowanie odpowiedniego momentu magnetycznego atomów. Następnie dochodzi zewnętrzne pole magnetyczne, a moment magnetyczny znajdujących się w nim atomów



Rysunek 10: Schemat kolejnych etapów działania magnetometrów optycznych.

precesuje wokół zewnętrznego pola. Powoduje to skrócenie płaszczyzny polaryzacji światła propagującego się przez gaz atomowy. Wreszcie ostatnim etapem jest detekcja skrócenia płaszczyzny polaryzacji. Opiszemy teraz bardziej szczegółowo każdy z tych etapów.

Moment magnetyczny atomu $\vec{\mu}$ jest nieco bardziej skomplikowany od np. momentu magnetycznego pojedynczego elektronu ze względu na złożoną budowę atomów. Przy odpowiednio małym zewnętrznym polu magnetycznym \vec{B} można pominąć jego wpływ i wyrazić $\vec{\mu}$ jako iloczyn czynnika żyromagnetycznego g_F , magnetonu Bohra μ_B oraz całkowitego momentu pędu \vec{F} :

$$\vec{\mu} = g_F \mu_B \vec{F}. \quad (43)$$

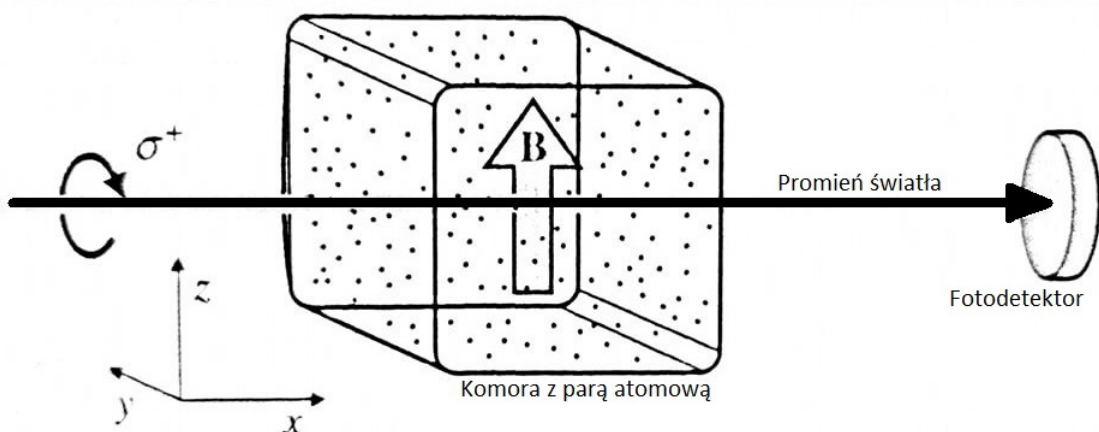
Na całkowity moment pędu atomu \vec{F} składa się spin jądra \vec{I} oraz całkowity moment pędu elektronów \vec{J} . Ten z kolei złożony jest z przyczynku od ruchu po orbicie \vec{L} oraz od spinu \vec{S} . Ostatecznie mamy więc następujący wzór:

$$\vec{F} = \vec{I} + \vec{J} = \vec{I} + (\vec{L} + \vec{S}). \quad (44)$$

Rozważmy teraz najprostszy model optycznego magnetometru, w którym zarówno stan podstawowy ma moment pędu $F = 1/2$ jak i stan wzbudzony ma $F' = 1/2$. Oznacza to, że moment pędu ma tylko dwie składowe M_F a wynika to z ogólnych własności kwantowania momentu pędu:

$$M_F = \{-F, -F + 1, \dots, F - 1, F\}, \quad (45)$$

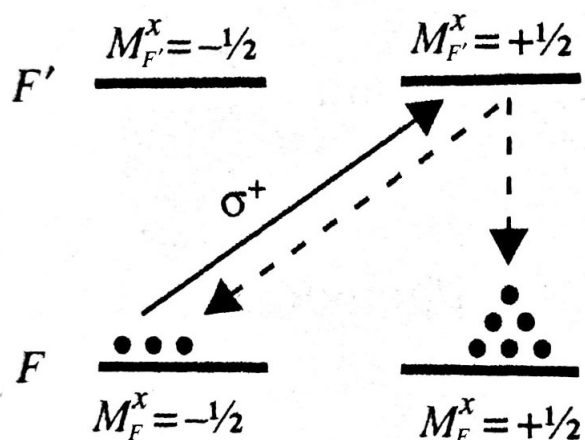
gdzie liczba wyrazów M_F wynosi $2F + 1$. Pompowanie optyczne opiszemy rozważając światło propagujące się wzdłuż osi X , oddziałujące z atomem, przy braku zewnętrznego pola magnetycznego. Zakładamy, że światło to jest spolaryzowane kołowo, a więc niesie ze sobą jedną jednostkę momentu pędu σ^+ wzdłuż osi X . Po absorpcji takiego fotonu rzut momentu pędu



Rysunek 11: Przykładowa struktura magnetometru optycznego z odniesieniem w układzie kartezyjańskim [12].

atomu musi zmienić się o jedną jednostkę, tj. $\Delta M = 1$. Wnioskujemy stąd, że możliwe jest tylko jedno przejście, przedstawione na Rys. 12, oraz wyrażone poniższym wzorem:

$$|F = 1/2, M_F^x = -1/2\rangle \rightarrow |F' = 1/2, M_{F'}^x = 1/2\rangle \quad (46)$$



Rysunek 12: Pompowanie optyczne do stanu $|F = 1/2, M_F^x = 1/2\rangle$ [12].

Następnie atomy, które przeszły do stanu wzbudzonego wracają do stanu podstawowego poprzez zjawisko emisji spontanicznej. Pompowanie optyczne polega na ciągłym oświetlaniu próbki atomowej, tak by atomy powracające do stanu $|F = 1/2, M_F^x = -1/2\rangle$ wszystkie wzbud-

dziły się i następnie przeszły do stanu $|F = 1/2, M_F^x = 1/2\rangle$ po emisji spontanicznej. W ten sposób otrzymujemy przygotowane atomy o momencie magnetycznym wzdłuż osi X . W takim przypadku próbka atomowa staje się przezroczysta dla światła o polaryzacji σ^+ , gdyż nie ma już atomów które mogłyby z takim światłem oddziaływać. W następnym kroku włączamy jednorodne pole magnetyczne wzdłuż osi Z i jednocześnie wyłączamy światło o polaryzacji σ^+ . Przypomnijmy, że atomy zostały przygotowane w stanie o momencie magnetycznym wzdłuż osi X , skrótowo zapiszemy go jako $|+\rangle_x$. W polu wzdłuż osi Z moment ten będzie precesował. Kwantowo proces ten opisujemy następująco. Hamiltonian oddziaływania momentu magnetycznego z zewnętrznym polem wynosi:

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -g_F \mu_B \vec{F} \cdot \vec{B} = -g_F \mu_B \frac{\hbar}{2} B \sigma_z, \quad (47)$$

gdzie użyliśmy faktu, że pole magnetyczne jest wzdłuż osi Z , tj. jego wektor wynosi $\vec{B} = (0, 0, B)$ i co za tym idzie iloczyn skalarny redukuje się wyłącznie do trzeciej składowej, oraz rozpisano operator spinu $F_z = \frac{\hbar}{2} \sigma_z$ w terminach macierzy Pauliego (zobacz dodatek A). Definiując częstość Larmora

$$\Omega_L = g_F \mu_B B, \quad (48)$$

hamiltonian upraszcza się do macierzy 2×2 :

$$H = -\frac{\hbar \Omega_L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

W dodatku B opisano ogólne rozwiązanie równania Schrödingera dla hamiltonianów niezależnych od czasu. Należy rozłożyć stan początkowy układu za pomocą wektorów własnych hamiltonianu. W naszym przypadku mamy dwie wartości własne $E_1 = -\frac{\hbar \Omega_L}{2}$ oraz $E_2 = \frac{\hbar \Omega_L}{2}$. Odpowiadające im wektory własne to wektory własne macierzy σ_z , tj. $|\phi_1\rangle = |+\rangle_z$ oraz $|\phi_2\rangle = |-\rangle_z$. Stan początkowy rozkłada się więc następująco:

$$|\psi(0)\rangle = |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle_z, \quad (50)$$

czyli oba współczynniki $c_1 = c_2 = 1/\sqrt{2}$, są sobie równe. Stąd stan układu w czasie t (zobacz dodatek B):

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\Omega_L t/2} |+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\Omega_L t/2} |-\rangle_z. \quad (51)$$

Wzór ten opisuje precesję. Widać to np. we wzorze na prawdopodobieństwo znalezienia atomu w stanie $|-\rangle_x$:

$$\begin{aligned}
P(-,x) &= |\langle \psi(t) | - \rangle_x|^2 = \frac{1}{4} \left| \left(e^{-i\Omega_L t/2} \langle + |_z + e^{i\Omega_L t/2} \langle - |_z \right) (\langle + |_z - \langle - |_z) \right|^2 \\
&= \{ \langle + | + \rangle_z = \langle - | - \rangle_z = 1; \langle + | - \rangle_z = \langle - | + \rangle_z = 0 \} \\
&= \frac{1}{4} \left| e^{-i\Omega_L t/2} - e^{i\Omega_L t/2} \right|^2 \\
&= \frac{1}{4} \left(e^{-i\Omega_L t/2} - e^{i\Omega_L t/2} \right) \left(e^{i\Omega_L t/2} - e^{-i\Omega_L t/2} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(1 + 1 - e^{-i\Omega_L t} - e^{i\Omega_L t} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(2 - \cos(\Omega_L t) + i \sin(\Omega_L t) - \cos(\Omega_L t) - i \sin(\Omega_L t) \right) \\
&= \frac{1}{2} [1 - \cos(\Omega_L t)] \\
&= \sin^2 \frac{\Omega_L t}{2}. \tag{52}
\end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo to oscyluje kiedy stan układu precesuje. Jeśli teraz będziemy obserwować prawdopodobieństwo obsadzenia stanu $|-\rangle_x$ (ponownie używając lasera spolaryzowanego σ^+) dane eksperymentalne będą oscylować w czasie z częstością Ω_L . Z otrzymanego wykresu można wyznaczyć czas kiedy $P(-,x)$ jest maksymalne, nazwijmy go t_{\max} . W maksimum argument sinusa wynosi $\pi/2$. Stąd mamy:

$$\frac{\Omega_L t_{\max}}{2} = \frac{\pi}{2}, \tag{53}$$

i podstawiając za Ω_L (48) wyznaczamy pole magnetyczne jako:

$$B = \frac{\Omega_L}{g_F \mu_B} = \frac{\pi}{g_F \mu_B t_{\max}}. \tag{54}$$

Podsumowując, t_{\max} wyznaczamy eksperymentalnie, zaś g_F oraz μ_B są dobrze znanymi stałymi dla danego atomu.

3.3 Magnetometr Bella i Blooma

Rozdział 3 rozpoczęliśmy od pokazania liniowej zależności pomiędzy obrotem spolaryzowanego liniowo światła a polem magnetycznym wzdłuż kierunku propagacji tego światła (39). Natomiast w podrozdziale 3.2 nasze rozważanie pokazało, że możliwy jest również nieliniowy efekt Faradaya znany w skrócie jako NMOR. Na skutek pompowania optycznego spolaryzowanym kołowo światłem dochodzi do precesji atomów (52) co jest właśnie podstawą działania magnetometrów optycznych.

W zaprezentowanym w podrozdziale 3.2 modelu, zarówno pole pompujące jak i zewnętrzne pole magnetyczne jest włączane i wyłączane dla lepszego zrozumienia problemu. Oczywiście jest to mało praktyczne. Potrzeba usprawnienia wykonywanych pomiarów, podczas których naturalnie występuje zewnętrzne pole magnetyczne doprowadziła Arnolda L. Bella oraz Williama E. Blooma do rozwiązania aby zmodulować pole pompujące w taki sposób, że $\Omega_m = \Omega_L$, gdzie Ω_m to częstotliwość modulacji. Kiedy światło pompujące optycznie atomy zacznie oscylować wraz nimi z częstotliwością rezonansową możliwy jest ciągły proces pompowania optycznego oraz wykonywania pomiarów nawet w obecności zewnętrznego pola magnetycznego. Innymi słowy optyczny magnetometr Bella i Blooma można również opisać za pomocą synchronicznego pompowania optycznego, gdzie przy $\Omega_m = \Omega_L$ mamy do czynienia ze “stroboskopowym” rezonansem.

Oczywiście nie jest to jedyny sposób na usprawnienie pomiarów lub też w niektórych przypadkach sposób na to aby pomiar był w ogóle możliwy. Różnego rodzaju modulacje czy to częstotliwości czy też amplitudy światła pompującego dostosowuje się do celu jaki chcemy osiągnąć. W zależności od wybranej modulacji otrzymamy inną precyzję i jesteśmy w stanie mierzyć pola magnetyczne o różnej sile. Wspomnijmy jeszcze, że przedstawiony model pompowania optycznego ma następujący praktyczny problem. Polaryzacja atomowa niszczy się w kontakcie atomów ze ścianami komory. Dlatego, aby znacznie wydłużyć czas koherencji polaryzacji atomowej korzysta się z komór, których ściany są pokryte parafiną, dodatkowo wewnątrz której znajduje się gaz zawierający atomy metali alkalicznych (litowców) najczęściej rubidu.

3.4 Magnetometr wektorowy

Opiszemy jeszcze ograniczenia tej metody w wyznaczaniu składowych wektora \vec{B} . Po pierwsze jeśli pole magnetyczne jest wzdłuż osi X , wówczas nie jesteśmy w stanie wyznaczyć jego długości. Jest tak dlatego, że po pompowaniu optycznym moment magnetyczny atomów nie precesuje w takim polu, a brak precesji jest niezależny od amplitudy B . Sprawdźmy jeszcze co dzieje się jeżeli pole magnetyczne jest wzdłuż osi Y . W takim przypadku postępujemy analogicznie jak wcześniej, kiedy pole magnetyczne było wzdłuż osi Z . Tym razem hamiltonian ma postać:

$$H = -\frac{\hbar\Omega_L}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

Stan początkowy rozkłada się w taki sposób (zobacz dodatek A):

$$|\psi(0)\rangle = |+\rangle_x = \frac{1}{2}(1+i)|+\rangle_y + \frac{1}{2}(1-i)|-\rangle_y, \quad (56)$$

Natomiast stan układu w czasie t (zobacz dodatek B):

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}(1+i)e^{i\Omega_L t/2}|+\rangle_y + \frac{1}{2}(1-i)e^{-i\Omega_L t/2}|-\rangle_y. \quad (57)$$

Na koniec liczymy prawdopodobieństwo znalezienia atomu w stanie $|-\rangle_x$ czyli $P(-,x) = |\langle\psi(t)|-\rangle_x|^2$:

$$\begin{aligned} P(-,x) &= \left| \left[\frac{1}{2}(1-i)e^{-i\Omega_L t/2}\langle+|_y + \frac{1}{2}(1+i)e^{i\Omega_L t/2}\langle-|_y \right] \left[\frac{1}{2}(-1+i)|+\rangle_y + \frac{1}{2}(-1-i)|-\rangle_y \right] \right|^2 \\ &= \{ \langle+|+\rangle_z = \langle-|-\rangle_z = 1; \langle+|-\rangle_z = \langle-|+\rangle_z = 0 \} \\ &= \left| \frac{1}{4}(1-i)(-1+i)e^{-i\Omega_L t/2} + \frac{1}{4}(1+i)(-1-i)e^{i\Omega_L t/2} \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{4}(-1+i+i+1)e^{-i\Omega_L t/2} + \frac{1}{4}(-1-i-i+1)e^{i\Omega_L t/2} \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{2}ie^{-i\Omega_L t/2} - \frac{1}{2}ie^{i\Omega_L t/2} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4}|i|^2 \left| e^{-i\Omega_L t/2} - e^{i\Omega_L t/2} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left| e^{-i\Omega_L t/2} - e^{i\Omega_L t/2} \right|^2 \\ &= \{ \text{Patrz wyprowadzenie (52)} \} \\ &= \sin^2 \frac{\Omega_L t}{2}. \end{aligned} \quad (58)$$

Jak widać wyprowadzone prawdopodobieństwo jest identyczne z wynikiem, który otrzymaliśmy dla zewnętrznego pola magnetycznego wzdłuż osi Z (52). Innymi słowy magnetometr oparty na pomiarze prawdopodobieństwa $P(-, x)$ nie jest w stanie odróżnić kierunków Y oraz Z zewnętrznego pola. Wynik ten oczywiście zgadza się ze zrozumieniem tego zjawiska jako precesji. Uogólniając, dowolny wektor zewnętrznego pola magnetycznego w płaszczyźnie ortogonalnej do początkowego momentu magnetycznego atomów będzie powodował precesję momentu atomowego z taką samą częstością. Nie mamy więc w ogóle informacji o kącie wektora \vec{B} w płaszczyźnie YZ . Łącząc ten fakt z brakiem precesji gdy zewnętrzne pole magnetyczne ustalone jest wzdłuż osi X , dla dowolnego pola \vec{B} wnioskujemy, że opisany magnetometr wyznacza długość składowej \vec{B} w płaszczyźnie YZ (prostopadłej do kierunku propagacji światła).

4 Podsumowanie

W ramach niniejszej pracy magisterskiej opisano podstawy fizyki dwóch wybranych magnetometrów: nadprzewodzących oraz optycznych. Jest to kolejny krok, kolejna cegiełka w kierunku rozwoju detekcji chorób najczęściej nowotworowych mózgu i problemów kardiologicznych. Badanie MEG czy też MGC zapewnia dokładność jakiej nie posiadają dotychczasowe metody w tym zakresie, jednak ze względów głównie ekonomicznych, nie jest możliwe ich wykorzystanie na większą skalę. Medycyna nie jest jedyną dziedziną wykorzystującą magnetometrię. Są one z powodzeniem wykorzystywane do badania skorupy ziemskiej czy otaczającego nas kosmosu.

Autorzy książek często z różnych powodów nie skupiają się na wyprowadzeniach wzorów i podają je jako gotowe. Na pierwszy rzut oka ciężko się domyśleć z czego poszczególne wzory wynikają dlatego ta praca może być pomocą w zrozumieniu nie tylko zjawisk fizycznych jakie stoją za działaniem wybranych magnetometrów ale też wyjaśnia krok po kroku wyprowadzenia wzorów z mechaniki kwantowej. Dodatek B jest zwięzłym wyjaśnieniem równania Schrödingera, z którego można korzystać dużo szerzej niż tylko na potrzeby tej pracy.

Spis rysunków

1	Urządzenie do magnetoencefalografii Elekta Neuromag TRIUX. Nad pacjentem znajduje się m.in. układ chłodzenia wymagany do działania nadprzewodzących interferometrów kwantowych, mierzących precyzyjnie pole magnetyczne mózgu.	6
2	Para Coupera: Pierwszy elektron wzbudza fonon poprzez zagęszczenie dodatnich jonów, natomiast drugi elektron zostaje przyciągnięty (zaabsorbowanie fononu). [4]	8
3	Rozważana sytuacja doświadczalna. Nadprzewodzący pierścień umieszczony jest w zewnętrznym polu magnetycznym. C jest konturem wewnątrz pierścienia wzdłuż którego liczymy całą liniową opisaną w tekście. Rysunek z [5]. . .	10
4	Po prawej stronie zwizualizowana jest interferencja kolejno nachodzących na siebie fal, natomiast po lewej stronie widoczne jest przesunięcie w fazie prowadzące do wygaszenia fali. [6]	13
5	Teoretyczna charakterystyka prądowo-napięciowa dla złącza Josephsona przy stałym prądzie operującym [8].	15
6	Schemat stałoprądowego SQUID-u z naniesionymi prądami [9].	16
7	Wykres zależności prądu na wyjściu od strumienia magnetycznego dla ośmiu wybranych faz $\phi_1 = k\pi/4$ gdzie $k = 0, 1, \dots, 7$ w SQUID-zie stałoprądowym. Przyjęto, że $I_c = 1$ mA.	18
8	Wykres zależności maksymalnego prądu na wyjściu od strumienia magnetycznego w SQUID-zie stałoprądowym.	19
9	Obrót płaszczyzny polaryzacji światła na skutek zjawiska Faradaya [10].	20
10	Schemat kolejnych etapów działania magnetometrów optycznych.	22
11	Przykładowa struktura magnetometru optycznego z odniesieniem w układzie kartezyjskim [12].	23
12	Pompowanie optyczne do stanu $ F = 1/2, M_F^x = 1/2\rangle$ [12].	23

Dodatek A: Spin-1/2

Celem tego dodatku jest krótkie “wyprowadzenie” zależności pomiędzy stanami spinowymi wzdłuż ortogonalnych kierunków. Przypomnijmy, że pomiar spinu 1/2 wzdłuż osi prostopadłych w formalizmie kwantowym opisywany jest macierzami Pauliego:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Wszystkie one mają wartości własne równe ± 1 , zaś ich wektory własne opisują stan mierzonego atomu po pomiarze. Relacje pomiędzy stanami spinowymi wzdłuż ortogonalnych kierunków otrzymujemy więc wyliczając odpowiednie zależności pomiędzy wektorami własnymi. W szczególności interesuje nas relacja pomiędzy wektorami własnymi macierzy σ_x oraz σ_z . Rozwiążmy więc odpowiednie problemy własne zaczynając od σ_z :

$$\begin{aligned} \det[\sigma_z - \lambda I] &= 0 \\ \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ -1 - \lambda + \lambda + \lambda^2 &= 0 \\ \lambda^2 &= 1 \\ \lambda &= \pm 1 \end{aligned}$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową. Otrzymane wartości własne faktycznie wynoszą $\lambda = \pm 1$, zatem aby otrzymać stany spinowe $|+\rangle_z$, $|-\rangle_z$, można stworzyć i rozwiązać następujące równanie:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix} &= \pm \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ +: \quad b = -b \Rightarrow b = 0 & \quad -: \quad a = -a \Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |+\rangle_z &= \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ |-\rangle_z &= \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Możemy teraz wykonać analogiczne obliczenia dla σ_x zaczynając od sprawdzenia wartości własnych:

$$\begin{aligned} \det[\sigma_x - \lambda I] &= 0 \\ \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \lambda^2 - 1 &= 0 \\ \lambda &= \pm 1 \end{aligned}$$

Wartości własne również wynoszą $\lambda = \pm 1$, więc możemy ułożyć i rozwiązać równanie:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} &= \pm \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ +: \quad b &= a \quad -: \quad b = -a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |+\rangle_x &= \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} = \left\{ a^2 + a^2 = 1 \quad a^2 = \frac{1}{2} \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ |-\rangle_x &= \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix} = \left\{ a^2 + a^2 = 1 \quad a^2 = \frac{1}{2} \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Do znalezienia szukanej przez nas zależności pomiędzy stanami spinowymi pozostało wykonanie kilku przekształceń:

$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

pamiętając, że $|+\rangle_z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ oraz $|-\rangle_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ otrzymujemy:

$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z \pm |-\rangle_z)$$

Na potrzeby dalszej części pracy wyprowadźmy jeszcze relacje pomiędzy wektorami własnymi macierzy σ_x oraz σ_y . Zaczynamy także od wartości własnych σ_y :

$$\begin{aligned} \det[\sigma_y - \lambda I] &= 0 \\ \begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \lambda^2 + i^2 &= 0 \\ \lambda &= \pm 1 \end{aligned}$$

Wartości własne wynoszą $\lambda = \pm 1$, więc układamy równanie:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -ib \\ ia \end{bmatrix} &= \pm \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$+ : \quad -ib = a \quad - : \quad -ib = -a$$

$$\begin{aligned} |+\rangle_y &= \begin{bmatrix} -ib \\ b \end{bmatrix} = \left\{ b^2 + b^2 = 1 \quad b^2 = \frac{1}{2} \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \\ |-\rangle_y &= \begin{bmatrix} ib \\ b \end{bmatrix} = \left\{ b^2 + b^2 = 1 \quad b^2 = \frac{1}{2} \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tym razem zależność nie jest widoczna gołym okiem dlatego zaczniemy od podstaw, sprawdzimy czy otrzymane $|+\rangle_y$ oraz $|-\rangle_y$ są do siebie ortogonalne:

$${}_y\langle - | + \rangle_y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (-1 + 1) = 0$$

Otrzymane stany spinowe wzdłuż osi Y są do siebie prostopadłe zatem szukana relacja wygląda następująco:

$$\begin{aligned} |+\rangle_x &= |+\rangle_{yy} \langle + | + \rangle_x + |-\rangle_{yy} \langle - | + \rangle_x \\ &= |+\rangle_y \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + |-\rangle_y \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (1+i) |+\rangle_y + \frac{1}{2} (1-i) |-\rangle_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|-\rangle_x &= |+\rangle_y \langle + | - \rangle_x + |-\rangle_y \langle - | - \rangle_x \\
&= |+\rangle_y \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + |-\rangle_y \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} (-1+i) |+\rangle_y + \frac{1}{2} (-1-i) |-\rangle_y
\end{aligned}$$

Dodatek B: Równanie Schrödingera

Celem tego dodatku jest wprowadzenie metody znajdowania funkcji falowej układu atomowego w chwili t jeśli znamy tę funkcję w chwili $t = 0$ oraz podano hamiltonian układu (o którym zakładamy, że jest niezależny od czasu). W tym celu przypomnijmy zależne od czasu równanie Schrödingera:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle,$$

gdzie H to hamiltonian układu zaś $|\psi(t)\rangle$ jego stan kwantowy. Formalnie rozwiązanie tego równania można zapisać następująco:

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}H\right) |\psi(0)\rangle, \quad (59)$$

gdzie eksponent z hamiltonianu rozumiemy za pomocą szeregu:

$$\exp\left(-\frac{it}{\hbar}H\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{it}{\hbar}H\right)^n.$$

W ogólności (dla dowolnego hamiltonianu) obliczenie tego szeregu jest trudne i stosujemy następujący trik. Najpierw wyznaczamy wektory i wartości własne hamiltonianu:

$$H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle.$$

Powyższe równanie własne znane jest jako niezależne od czasu równanie Schrödingera. Z ogólnych własności wektorów własnych wiemy, że za pomocą zbioru funkcji własnych $|\phi_n\rangle$ możemy wyrazić dowolną funkcję falową. W szczególności rozpiszmy za ich pomocą początkowy stan układu:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle.$$

Używając tej formuły w równaniu (59) otrzymujemy następujący ogólny wzór:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \exp\left(-\frac{it}{\hbar}H\right) \sum_n c_n |\phi_n\rangle = \sum_n c_n \exp\left(-\frac{it}{\hbar}H\right) |\phi_n\rangle \\ &= \sum_n c_n e^{-\frac{it}{\hbar}E_n} |\phi_n\rangle, \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej linijce skorzystaliśmy z niezależnego od czasu równania Schrödingera i definicji exponentu jako szeregu.

Literatura

- [1] D. Cohen *Magnetoencephalography: evidence of magnetic fields produced by alpha-rhythm currents*, Science **161**, 784 (1964).
- [2] R. W. Paterson et al. *Differential diagnosis of Jakob-Creutzfeldt disease*, Arch. Neurol. **69**, 1578 (2012).
- [3] http://galaxy.uci.agh.edu.pl/~eam/start/rozdzialy/nowe_rozdz.34.Magnetokardiografia.pdf
Piotr Augustyniak *Magnetografia*, Elektroniczna aparatura medyczna, Kraków (2015)
- [4] <http://th-www.if.uj.edu.pl/~amoles/2018/QM/qm7.pdf> *Nadprzewodniki*
- [5] C. Kittel *Wstęp do fizyki ciała stałego* (1999)
- [6] <http://www.supraconductivite.fr/en/index.php?p=applications-squid-quantification> *Flux quantization*
- [7] J.J. Sakurai, J. Napolitano *Modern Quantum Mechanics* Second Edition, 134 (2012).
- [8] <https://sites.google.com/a/umn.edu/mxp/student-projects/spring-2019/s19josephson>
Yuka Nakato, Yuhao Yang *Magnetic Field Dependence of the Critical Current in Nb-Si-Nb Josephson Junction*, University of Minnesota, Methods of Experimental Physics II (Wiosna 2019)
- [9] <http://web.mit.edu/6.763/www/FT03/Lectures/Lecture12.pdf> *Lecture 12: Superconducting Quantum Interference Devices* Massachusetts Institute of Technology (2003)
- [10] Mahmoud E. Yousif *The Faraday Effect Explained* Physics Department - The University of Nairobi (2017)
- [11] <https://slideplayer.com/slide/4610528/> *Nonlinear Magneto-Optical Rotation with Frequency-Modulated Light* by Derek Kimball Dmitry Budker Simon Rochester Valeriy Yashchuk Max Zolotarev
- [12] D. Budker, D. F. Jackson Kimball *Optical Magnetometry*, Cambridge University Press (2013).